Bestimmung der W-Kurven

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der
hohen philosophischen Fakultät der Universität Basel

vorgelegt von

Emil Schubarth

aus Basel.

Basel
Buchdruckerei Emil Birkhäuser & Cie.
1927

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. *H. Mohrmann* und Dr. *O. Spiess*.

Basel, den 15. Dezember 1925.

Prof. Dr. **Aug. Hagenbach**, Dekan.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Erschienen in den *Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft Basel*, Band 38, 1927.

Bestimmung der W-Kurven.

Von

Emil Schubarth.

Einleitung.
Übersicht.
I. Klassifikation der Kollineationen.
Bestimmung der W-Kurven.
II. Kontinuierliche Gruppen.
Bestimmung der W-Kurven. —
Darstellung der W-Kurven.
III. Differentialgeometrische Bestimmung der W-Kurven.
Projektive Differentialgeometrie. —
W-Kurven des gewöhnlichen Raumes.

Einleitung.

Eine wahrhaft „organisatorische" Gedankenbildung haben KLEIN und LIE in der Idee der kontinuierlichen Gruppe herausgearbeitet und mit ihr Geometrie und Analysis durchwirkt. Mit zu den ersten Arbeiten in dieser Richtung gehörten die Untersuchungen über „diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen". Hierbei haben sich allererst die Begriffe „kontinuierliche Gruppe" und, im weiteren Verlauf, „zu einer Gruppe gehörige Geometrie" entwickelt.

Kurven von der in Rede stehenden Art sind allbekannt: Gerade, Kreis, Schraubenlinie lassen sich in sich verschieben, sie gestatten eine Gruppe von Bewegungen. Das beruht auf ihrer Eigenart, konstante Krümmung und Windung zu besitzen, welche Bewegungen gegenüber die invarianten Eigenschaften einer Kurve ausmachen. Sie sind die einzigen Kurven dieser Art. Betrachtet man eine kontinuierliche Folge derselben unendlich kleinen Bewegungen: bei ihr beschreibt ein beliebiger Punkt des Raumes eine Gerade, einen Kreis oder eine Schraubenlinie, je nachdem es sich um eine Translation, Rotation oder ihre Kombination, eine Schraubung, handelt.

Treibt man nicht gewöhnliche, sondern projektive Geometrie, d. h. untersucht man Gebilde auf invariante Eigenschaften gegenüber der Gruppe nicht der Bewegungen, sondern aller derjenigen Transformationen, welche gerade Linien wieder in gerade Linien überführen, so wird die Mannigfaltigkeit der Kurven, welche ein Punkt bei solchen Transformationen durchläuft, viel grösser. Bei Bewegungen bleibt die Entfernung zweier Punkte konstant, bei Ähnlichkeitstransformationen das Verhältnis der Entfernungen dreier Punkte, bei projektiven Abbildungen endlich das Doppelverhältnis von vier Punkten (oder Strahlen). Der Invarianz von Doppelverhältnissen

zuliebe („Würfen", wie v. Staudt sie nennt) prägte Lie den Namen „W-Kurven" für die Bahnkurven projektiver Transformationen; der von Halphen eingeführte Name „courbe anharmonique" gibt denselben Sinn wieder.

Unter den projektiven Transformationen sind die Ähnlichkeitstransformationen und unter diesen die Bewegungen mit enthalten, eine jede der aufgezählten Transformationsgruppen bildet eine Untergruppe der vorhergehenden. Daher sind auch unter den W-Kurven die Kurven mit konstanter Krümmung und Torsion mit enthalten, doch lassen sich andere Beispiele leicht anschaulich klar machen. Ein erstes ist die logarithmische Spirale, auf deren Wiederkehreigenschaften Jakob Bernoulli aufmerksam wurde. Bei einer Drehung und gleichzeitigen Streckung (Ähnlichkeitstransformation) der Ebene mit dem gleichen Fixpunkt beschreibt ein beliebiger Punkt eine solche Linie. Aus der Eigenschaft der Spirale, W-Kurve zu sein, erklären sich am besten die vielen Reproduktionsexperimente, die man mit ihr anstellen kann. Ihre Evolute ist eine kongruente Spirale; den asymptotischen Punkt der Spirale denke man sich leuchtend, die Spirale selbst spiegelnd: die Enveloppe der reflektierten Strahlen (Katakaustik) ist eine kongruente Spirale; werden die Strahlen, nach dem Gesetz von Snellius, an der Spirale gebrochen, so ist die Hüllkurve der Strahlen nach der Brechung (Diakaustik) eine kongruente Spirale. Ein zweites Beispiel: die Loxodromen eines Drehkegels (projektive Verallgemeinerung der Schraubenlinie); ein drittes: die Loxodromen auf der Kugel. Alle diese Kurven werden durch Ähnlichkeitstransformationen in sich übergeführt, welche einerseits die Krümmungslinien der betreffenden Flächen unter sich vertauschen, andrerseits die Winkel ungeändert lassen.

Die Ähnlichkeitstransformationen bilden eine Untergruppe der konformen Abbildungen des Raumes; ihre Bahnkurven kann man, ebenso gut wie zu den W-Kurven, zu den Kurven mit einer automorphen Gruppe von konformen Transformationen rechnen. Analog den invarianten Eigenschaften einer Kurve gegenüber Bewegungen, nämlich der Krümmung und Torsion, gibt es Invarianten gegenüber der Gruppe der projektiven oder konformen Abbildungen. In Anlehnung an die Bedeutung der entsprechenden Bildungen in der Bewegungsgeometrie werden sie erste und zweite Projektiv- bzw. Konformkrümmung genannt. Und entsprechend ist die Konstanz dieser Krümmungen längs der Kurve charakteristisch für Kurven, die durch projektive oder konforme Transformationen in sich übergehen sollen.

Wie man in der gewöhnlichen Geometrie eine Kurve in der infinitesimalen Umgebung eines ihrer Punkte durch den Krümmungskreis oder die Schmiegungsschraubenlinie ersetzt (d. i. die Kurve mit denselben und überall gleichen Bewegungsinvarianten wie die ursprüngliche Kurve sie in jenem Punkte hat), so dient in der projektiven Geometrie diejenige W-Kurve zur Annäherung, welche dieselben (konstanten) projektiven Differentialinvarianten besitzt wie die gegebene Kurve in jenem Punkte.

Auf die zahlreichen Eigenschaften der W-Kurven, welche in der Invarianz von Doppelverhältnissen ihren Grund haben, wird in dieser Arbeit nicht eingegangen; es wird vielmehr die Bestimmung der W-Kurven durchgeführt, erstens, indem sie klassifiziert und indem für die Gleichungen der Kurven aller möglichen Klassen Normalformen angegeben werden, zweitens und am einfachsten, indem die W-Kurven durch die Konstanz ihrer Differentialinvarianten (Projektivkrümmungen) charakterisiert werden. Am Schluss sind für den dreidimensionalen Raum besondere W-Kurven aufgeführt.

Übersicht.

Die systematische Bestimmung der W-Kurven, d. h. der Kurven, die durch eine kontinuierliche Gruppe von Kollineationen in sich übergehen, stützt sich naturgemäss auf eine Einteilung der projektiven Transformationen in Klassen, derart, dass in ein und dieselbe Klasse alle und nur die Transformationen aufgenommen werden, die sich durch projektive Umformung in eine bestimmte Transformation überführen lassen: den Repräsentanten oder die Normalform der Klasse. Die Klassifikation überträgt sich sofort auf die zugehörigen Bahnkurven und liefert Normalformen für ihre analytische Darstellung.

Für Paare bilinearer Formen gab WEIERSTRASS[1]) eine Klasseneinteilung der geforderten Art; er schuf in seiner Theorie der Elementarteiler ein Kriterium für die Zugehörigkeit zu einer bestimmten Klasse und stellte Normalformen für eine jede auf. SEGRE[2]) hat das Prinzip von WEIERSTRASS für die Klassifikation speziell der Kollineationen verwendet — insofern eine kollineare Beziehung zwischen den Punkten eines Raumes analytisch durch ein Paar von bilinearen Formen vermittelt wird — und dargetan, dass die Charakterisierung einer Kollineation durch die Elementarteiler ihrer „charakteristischen" Determinante äquivalent ist einer solchen durch die Anordnung der Fixelemente.

Die W-Kurven sind die Bahnkurven ihrer automorphen kontinuierlichen Gruppe und ergeben sich als solche durch Integration des Systems von Differentialgleichungen, das durch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe geliefert wird. Dieses System besteht aus $n+1$ homogenen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, es ist äquivalent einer homogenen linearen Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit konstanten Koeffizienten, und $n+1$ linear unabhängige partikulare Integrale eben dieser Gleichung geben die homogenen Koordinaten einer W-Kurve als Funktionen eines Parameters.

Je nachdem man die Klasseneinteilung der Kollineationen zum Ausgangspunkt der Untersuchung macht oder sie erst unterwegs vornimmt, kommt man auf verschiedenen Wegen zum Ziel. Der erste (Abschnitt I) ist nichts anderes als die Übertragung der ursprünglich von KLEIN und LIE[3]) verfolgten Methode zur

---

[1]) Weierstrass, Monatsber. Preuss. Akad. Berlin 1868, p. 3; Werke II, p. 19—44.

[2]) Segre, Atti dei Lincei (Memorie) (3) 19 (1884), p. 127.

[3]) Klein und Lie, Paris C. R. 70 (1870) = Klein, Ges. Abh. I, p. 415; Math. Annalen 4 (1871) = Ges. Abh. I, p. 424.

Bestimmung der ebenen W-Kurven auf den Raum von beliebig vielen Dimensionen.

Ein zweiter Weg (Abschnitt II) geht aus von den infinitesimalen Transformationen der allgemeinen homogenen linearen Gruppe. Sie führen sofort auf ein lineares System von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Seine Auflösung kann, in engster Anlehnung an die vorige Methode, mit Hilfe der Elementarteilertheorie geschehen, indem für die infinitesimalen Transformationen, wie vorhin für die endlichen, kanonische Formen aufgesucht werden. Ein Fundamentalsystem von Lösungen gibt die homogenen Koordinaten einer W-Kurve in Parameterform, und für die Klassenzugehörigkeit ist die Determinante des Systems charakteristisch.

Von ganz anderer Seite und viel unmittelbarer führt zu demselben Ergebnis eine Betrachtungsart, die letzten Endes in der von Klein dargelegten Idee der Geometrie als der Invariantentheorie einer Transformationsgruppe verankert ist. Danach wird innerhalb der Mannigfaltigkeit, auf die sich die zugrunde gelegte Transformationsgruppe bezieht, ein Gebilde durch seine Invarianten gegenüber dieser Gruppe bis auf Transformationen der Gruppe bestimmt. Insbesondere ergibt die Theorie der Differentialinvarianten der eindimensionalen Gebilde gegenüber der Gruppe der nicht-singulären Kollineationen des R_n die projektive Differentialgeometrie der Kurven im n-dimensionalen Raum. Sie ist eng verknüpft mit der Invariantentheorie der gewöhnlichen homogenen linearen Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Integrale ebenfalls bis auf homogene lineare Transformationen bestimmt sind. Diese Theorie ist im wesentlichen das Werk G. H. Halphens.

Auf der hier entwickelten Grundlage sind die eindimensionalen Gebilde leicht zu kennzeichnen, die eine kontinuierliche eingliedrige Untergruppe der die betreffende Geometrie erzeugenden Transformationsgruppe gestatten: ihre absoluten Differentialinvarianten gegenüber dieser Untergruppe müssen längs der ganzen Kurve denselben Wert haben.

Die Kurven mit festen Differentialinvarianten gegenüber projektiven Transformationen (Abschnitt III) sind insbesondere die Kurven mit einer automorphen Kollineationsgruppe. Durch die Konstanz der absoluten Invarianten ist die homogene lineare Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, von der $n+1$ linear unabhängige Partikularlösungen die homogenen Koordinaten

der „attachierten Kurve“[1]) des R_n liefern, nach Halphen[1]) gekennzeichnet als eine solche mit konstanten Koeffizienten. Die Klasseneinteilung ist der infinitesimalen Methode fremd, sie tritt erst beim Übergang zu endlichen Gleichungen hervor. Doch gewinnt man leicht auch differentialgeometrische Kriterien für die Zugehörigkeit zu einer Klasse. Die verschiedenen Klassen von W-Kurven entsprechen nämlich den verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten der Wurzeln der charakteristischen Gleichung, die zur Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Kurve gehört. Die charakteristische Gleichung liefert zwischen den Differentialinvarianten Beziehungen, durch welche vom jetzigen Gesichtspunkt aus die W-Kurvenklassen charakterisiert sind.

I.

Mit x_i, u_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ bezeichnen wir die homogenen Koordinaten eines Punktes x bzw. einer Hyperebene u in einem linearen Raum R_n von n Dimensionen. Eine projektive Transformation zwischen den Punkten dieses Raumes

$$\lambda x_i' = \Sigma a_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2 \ldots, n+1;\ a_{ik} = \text{konst.},\ \lambda \text{ ein Proportionalitätsfaktor}) \tag{1}$$

lässt sich auch durch zwei bilineare Formen

$$\begin{cases} \varphi(x\,u') = \Sigma a_{ik} x_k u_i' = 0 \\ \psi(x'\,u') = \Sigma x_i' u_i' = 0 \end{cases} \tag{2}$$

darstellen, wobei die zweite, die bilineare Einheitsform, die Inzidenz der Hyperebene u' und des Punktes x' ausdrückt. Wir betrachten lediglich nicht-singuläre Transformationen, d. h. solche, deren Transformationsdeterminante $|a_{ik}| \neq 0$ ist. Alsdann ist die kollineare Beziehung zwischen den Punkten x und x' des Raumes R_n eindeutig umkehrbar. Andernfalls werden die transformierten Punkte nicht mehr den ganzen Raum aufspannen, die Kurven, die durch die betreffende Kollineation in sich übergehen, zerfallen in Gebilde, die einem Raum von weniger als n Dimensionen angehören.

Klassifikation der Kollineationen.

Die bilinearen Formen (2) in $2(n+1)$ Variabeln nehmen wir zu Grundformen eines Formenbüschels $\varphi - \lambda\psi$. Seine Matrix

[1]) Halphen, Sur la réduction des équations diff. linéaires aux formes intégr. Mémoires présentés par divers savants t. 28, 2e série, no. 1, 1884 = Oeuvres III, p. 1–260.

hat die Gestalt $A - \lambda E$, wo A die Matrix aus den Koeffizienten a_{ik}, E die Einheitsmatrix bedeutet. Die Determinante der Matrix $A - \lambda E$ liefert, gleich Null gesetzt, die charakteristische Gleichung der Transformation (1). Sie gibt Aufschluss über die Lage der Fixelemente: verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung entsprechen verschiedene Fixpunkte.

Die charakteristische Funktion $|A - \lambda E|$ lässt sich, wie WEIERSTRASS[1]) gezeigt hat, derart in lineare Faktoren, „Elementarteiler", zerfällen:

$$|A - \lambda E| = (c_1 - \lambda)^{e_1} (c_2 - \lambda)^{e_2} \ldots (c_r - \lambda)^{e_r},$$

dass

$$(c_1 - \lambda)^{e_1}, \ (c_2 - \lambda)^{e_2}, \ \ldots, \ (c_r - \lambda)^{e_r} \qquad (e_1 + e_2 + \ldots + e_r = n + 1)$$

die Invarianten der Funktion gegenüber linearen Transformationen ausmachen.

Kollineationen, die durch lineare Transformation aus einander hervorgehen, nennen wir äquivalent. Durch Angabe der Gradzahlen e_ν der Elementarteiler $(c_\nu - \lambda)^{e_\nu}$ treffen wir eine Einteilung der Kollineationen in Klassen folgender Art: äquivalente Kollineationen gehören zur selben Klasse, doch sind Kollineationen einer und derselben Klasse nicht notwendig äquivalent; dazu ist vielmehr erforderlich, dass die in die betreffenden Normalformen eingehenden Konstanten c_ν übereinstimmen. Eine Reihe vorgeschriebener Gradzahlen $e_1, e_2, \ldots, e_r$, mit der Bedingung $e_1 + e_2 + \ldots + e_r = n + 1$ und etwa $e_1 \geqq e_2 \geqq \ldots \geqq e_r$, nennen wir die „Charakteristik" einer Kollineation und schreiben sie $[e_1 e_2 \ldots e_r]$. Die charakteristische Matrix einer solchen Kollineation ist äquivalent mit der folgenden „Normalform"

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & M_r \end{pmatrix};$$

darin stellt M_ν selbst eine Matrix e_ν^{ter} Ordnung vor von der Form

$$\begin{pmatrix} c_\nu - \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_\nu - \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_\nu - \lambda \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige Formenpaar ist

$$\left|\begin{array}{l} \varphi = \left(\sum_{1}^{e_1} c_1 x_i u_i + \sum_{2}^{e_1} x_{i-1} u_i\right) + \left(\sum_{e_1+1}^{e_1+e_2} c_2 x_i u_i + \sum_{e_1+2}^{e_1+e_2} x_{i-1} u_i\right) + \ldots \\ \qquad\qquad + \left(\sum_{n-e_r+2}^{n+1} c_r x_i u_i + \sum_{n-e_r+3}^{n+1} x_{i-1} u_i\right) \\ \psi = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_{n+1} u_{n+1} . \end{array}\right.$$

Die charakteristische Gleichung hat r verschiedene Wurzeln λ_ν bzw. von der Multiplizität e_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, r)$. Die Charakteristik gibt die Anordnung der Fixelemente wieder, die letztere ist das geometrische Kennzeichen einer Klasse.

Danach lässt sich die allgemeine nicht-singuläre lineare Transformation der $n+1$ homogenen Koordinaten des R_n, mit der Charakteristik $[e_1\, e_2 \ldots e_r]$ schreiben in Form von r Gruppen

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x'_1 = a_1 x_1 \\ \lambda x'_2 = x_1 + a_1 x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda x'_{e_1} = x_{e_1-2} + a_1 x_{e_1} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda x'_{e_1+1} = a_2 x_{e_1+1} & \\ \lambda x'_{e_1+2} = x_{e_1+1} + a_2 x_{e_1+2} & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (e_1 + e_2 + \ldots + e_r = n+1, \\ \lambda x'_{e_1+e_2} = x_{e_1+e_2-1} + a_2 x_{e_1+e_2} & \text{und etwa } e_1 \geq e_2 \geq \ldots \geq e_r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x'_{n-e_r+2} = a_r x_{n-e_r+2} \\ \lambda x'_{n-e_r+3} = x_{n-e_r+2} + a_r x_{n-e_r+3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda x'_{n+1} = x_n + a_r x_{n+1} \end{array}\right.$$

Die Variable x_{n-e_r+2}, das erste Glied der letzten Gruppe, als homogenisierende betrachtet, liefert in nicht-homogenen Koordinaten y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ Transformationsgleichungen (r-Gruppen)

$$\left\{\begin{array}{l} y'_1 = c_1 y_1 \\ y'_2 = c_r y_1 + c_1 y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_{e_1} = c_r y_{e_1-1} + c_1 y_{e_1} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y'_{e_1+1} = c_2 y_{e_1+1} \\ y'_{e_1+2} = c_r y_{e_1+1} + c_2 y_{e_1+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_{e_1+e_2} = c_r y_{e_1+e_2-1} + c_2 y_{e_1+e_2} \end{array}\right.$$

$$\ldots\ldots \qquad \left\{\begin{array}{l} y'_{n-e_r+2} = c_r + y_{n-e_r+2} \\ y'_{n-e_r+3} = c_r y_{n-e_r+2} + y_{n-e_r+3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n \qquad\quad = c_r y_{n-1} + y_n . \end{array}\right.$$

Bestimmung der W-Kurven.

Wir iterieren die Transformation. Die Formeln nehmen für eine t-malige Ausführung der Transformation die Gestalt an:

$r-1$ Gruppen
$$\begin{cases} y'_1 = c_1^{\,t}\, y_1 \\ y'_2 = t\, c_1^{\,t-1} c_r\, y_1 + c_1^{\,t}\, y_2 \\ y'_3 = \binom{t}{2} c_1^{\,t-2} c_r^{\,2}\, y_1 + t\, c_1^{\,t-1} c_r\, y_2 + c_1^{\,t}\, y_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

und eine Gruppe
$$\begin{cases} y'_{n-e_r+2} = t\, c_r + y_{n-e_r+2} \\ y'_{n-e_r+3} = \binom{t}{2} c_r^{\,2} + t\, c_r\, y_{n-e_r+2}\, y_{n-e_r+3} \\ y'_{n-e_r+4} = \binom{t}{3} c_r^{\,3} + \binom{t}{2} c_r^{\,2}\, y_{n-e_r+2} + t\, c_r\, y_{n-e_r+3} \\ \qquad\qquad + y_{n-e_r+4} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Betrachten wir, um zu einer kontinuierlichen Gruppe mit infinitesimalen Transformationen zu gelangen, t als kontinuierlich veränderlichen Parameter, so führt der Übergang zu dt auf Differentialgleichungen, denen die Koordinaten der „Bahnkurve" (vgl. den Anfang von II) der betreffenden Transformation als Funktionen eben dieses Parameters genügen, und zwar auf

$r-1$ Gruppen
$$\begin{cases} d\,y_1 = a_1\, y_1\, d\,t \\ d\,y_2 = (a_2\, y_1 + a_1\, y_2)\, d\,t \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d\,y_{e_1} = (a_{e_1}\, y_1 + \dots + a_2\, y_{e_1-1} + a_1\, y_{e_1})\, d\,t \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

und eine Gruppe
$$\begin{cases} d\,y_{n-e_r+2} = \beta_1\, d\,t \\ d\,y_{n-e_r+3} = (\beta_2 + \beta_1\, y_{n-e_r+2})\, d\,t \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d\,y_n = (\beta_{e_r-2} + \beta_{e_r-3}\, y_{n-e_r+2} + \dots + \beta_2\, y_{n-2} \\ \qquad\qquad + \beta_1\, y_{n-1})\, d\,t \end{cases}$$

(die a_i, β_i bezeichnen Konstanten).

Sukzessive Integration ergibt Integrale, die projektiv identisch sind mit

$r-1$ Gruppen
$$\begin{cases} y_1 = c_1^{\,t} \\ y_2 = c_1^{\,t} \cdot g_1(t) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{e_1} = c_1^{\,t} \cdot g_{e_1-1}(t) \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

($g_i(t)$ ein Polynom i^{ten} Grades in t)

und einer letzten Gruppe $\begin{cases} y_{n-e_r+2} = t \\ y_{n-e_r+3} = t^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = t^{e_r-1} \end{cases}$

(Die letzte Gruppe fällt weg, wenn der letzte Charakter $e_r = 1$ ist).

Während die obige spezielle Form eines Systems linearer Differentialgleichungen sich elementar integrieren lässt, erfordert das allgemeine lineare System mit konstanten Koeffizienten eine weitere Analyse, die durch die Elementarteilertheorie geleistet wird. Durch die frühere Klassifikation der Kollineationen haben wir diese Analyse vorweggenommen, im II. Abschnitt wird sie jedoch erst die Klassifikation liefern.

II.

Kontinuierliche Gruppen.

Die Mannigfaltigkeit von ∞^1 Transformationen des n-dimensionalen Raumes

$$(1) \qquad x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

möge eine Gruppe bilden; nach der Anzahl der Parameter t heisst eine solche Gruppe ein-gliedrig oder ein-parametrig. Jede Gruppe enthält die identische Transformation, ihr entspreche, durch geeignete Normierung, der Parameterwert $t = 0$. Ist der Parameter t eine stetige Wertefolge zu durchlaufen fähig, so spricht man von einer kontinuierlichen Gruppe. Zu einem unendlich kleinen Wert dt des Parameters gehört eine infinitesimale Verrückung

$$x'_i - x_i = dx_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_{t=0} dt.$$

Solche infinitesimale Transformationen sind für kontinuierliche Gruppen die Bausteine: sie können gewissermassen als die erzeugenden Operationen angesehen werden, durch deren fortgesetzte Anwendung alle Transformationen der Gruppe entstehen.

Ein beliebiger Punkt des Raumes durchläuft bei der geschilderten Erzeugung der Transformationsgruppe eine Kurve, deren Richtung im Punkte x durch die Differentiale

$$(2) \qquad dx_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_{t=0} dt$$

gegeben ist. Sie heisst die Bahnkurve der eingliedrigen Gruppe (1) und wird aus den definierenden Differentialgleichungen (2) durch Integration gewonnen. t übernimmt dabei die Rolle des Kurvenparameters.

Bestimmung der W-Kurven.

Um die homogenen Koordinaten des R_n bequem handhaben zu können, deuten wir sie als nicht-homogene Koordinaten eines R_{n+1} und betrachten anstatt der Gruppe der projektiven Transformationen des R_n die affine Gruppe des R_{n+1}.

Bei einer kontinuierlichen Gruppe von ∞^1 Affinitäten sind die Funktionen f_i linear. Die Koordinaten der Bahnkurven sind die Lösungen des allgemeinen homogenen Systems von $n+1$ linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n+1}x_{n+1} = 0 \\ \dfrac{dx_2}{dt} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,n+1}x_{n+1} = 0\,. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_{n+1}}{dt} + a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \ldots + a_{n+1,n+1}x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Um es formal unseren früheren Betrachtungen über bilineare Formen zugänglich zu machen, folgen wir einem von Weierstrass[1]) als einer ersten Anwendung seiner Formentheorie gegebenen Verfahren. Wir multiplizieren die Gleichungen (3) mit $n+1$ unbestimmten Konstanten $u_k = \text{konst.}$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ und addieren sie, und fassen

$$\Sigma a_{ik}x_i u_k = \varphi(xu)\,, \qquad \Sigma x_i u_i = \psi(xu)$$

in die bilinearen Formen φ und ψ zusammen. Dann können wir (3) symbolisch schreiben

$$(4)\qquad \frac{d\psi(xu)}{dt} + \varphi(xu) = 0\,.$$

[1]) Weierstrass, Bemerkungen zur Integration eines Systems linearer Differentialgleichungen mit konst. Koeff. Ber. Berlin 1875 = Ges. Werke II, p. 75.

Jetzt ziehen wir das Äquivalenzprinzip von Weierstrass heran. Wir bilden das Formenbüschel $\varphi - \lambda\psi$. Seine Matrix $A = |a - \lambda E|$, die charakteristische Matrix des Systems (3), besitze die Elementarteiler

$$(\lambda_\nu - \lambda)^{e_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r;\ e_1 + e_2 + \ldots e_r = n + 1)\ .$$

Durch lineare Substitutionen erreichen wir, wie in Abschnitt I, die Normalform

$$(5)\quad \begin{cases} \varphi = \left(\sum_1^{e_1} c_1 x_i u_i + \sum_2^{e_1} x_{i-1} u_i\right) + \left(\sum_{e_1+1}^{e_1+e_2} c_2 x_i u_i + \sum_{e_1+2}^{e_1+e_2} x_{i-1} u_i\right) \\ \qquad\qquad + \ldots + \left(\sum_{n-e_r+2}^{n+1} c_r x_i u_i + \sum_{n-e_r+3}^{n+1} x_{i-1} u_i\right) \\ \psi = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_{n+1} u_{n+1}\ , \end{cases}$$

d. h. anstelle von (4) die Gleichung (nach u_k zusammengefasst)

$$(6)\quad \begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} u_1 + \frac{dx_2}{dt} u_2 + \ldots + \frac{dx_{n+1}}{dt} u_{n+1} = \\ &\quad c_1 x_1 u_1 + (c_1 x_2 + x_1) u_2 + \ldots + (c_1 x_{e_1} + x_{e_1-1}) u_{e_1} \\ &+ c_2 x_{e_1+1} u_{e_1+1} + (c_2 x_{e_1+2} + x_{e_1+1}) u_{e_1+2} \\ &\qquad + \ldots + (c_2 x_{e_1+e_2} + x_{e_1+e_2-1}) u_{e_1+e_2} \\ &+ \ldots\ldots\ldots \\ &+ c_r x_{n-e_r+2} u_{n-e_r+2} + (c_r x_{n-e_r+3} + x_{n-e_r+2}) u_{n-e_r+3} \\ &\qquad + \ldots + (c_r x_{n+1} + x_n) u_{n+1}\ . \end{aligned}$$

Hierin bedeuten die u_k beliebige Konstanten. Der Gleichung (6) entnehmen wir durch Vergleichung ihrer Koeffizienten ein unserm Ausgangssystem äquivalentes, bestehend aus r Gruppen

$$(7)\quad \begin{aligned} &\frac{dx_{\alpha+1}}{dt} = c_\nu x_{\alpha+1} \\ &\frac{dx_{\alpha+2}}{dt} = c_\nu x_{\alpha+2} + x_{\alpha+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dx_{\alpha+c_\nu}}{dt} = c_\nu x_{\alpha+c_\nu} + x_{\alpha+c_\nu-1} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, e_1, e_1+e_2, \ldots, n+1-e_r \\ \nu = 1, 2, 3, \ldots, r \\ \alpha,\ \nu \text{ gekoppelt} \end{pmatrix}$$

Die Integration dieses Systems führt zum Ergebnis des ersten Abschnitts. Mit WEIERSTRASS multiplizieren wir eine Gruppe (6) mit $e^{-c_\nu t}$ (e die Basis der natürlichen Logarithmen), und erhalten

$$\frac{d}{dt}(x_{\alpha+1}e^{-c_\nu t}) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(x_{\alpha+2}e^{-c_\nu t}) = x_{\alpha+1}e^{-c_\nu t}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}(x_{\alpha+e_\nu}e^{-c_\nu t}) = x_{\alpha+e_\nu-1}e^{-c_\nu t}$$

integriert

$$x_{\alpha+1} = A_1 e^{c_\nu t}$$

$$x_{\alpha+2} = (A_1 t + A_2)e^{c_\nu t}$$

$$x_{\alpha+3} = (\tfrac{1}{2}A_1 t^2 + A_2 t + A_3)e^{c_\nu t} \tag{8}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{\alpha+e_\nu} = \left(\frac{A_1}{(e_\nu-1)!}t^{e_\nu-1} + \frac{A_2}{(e_\nu-2)!}t^{e_\nu-2} + \cdots + A_{e_\nu}\right)e^{c_\nu t}$$

als homogene Koordinaten der W-Kurven.

Darstellung der W-Kurven.

Durch projektive Umformung erhalten wir als Normalform für die Darstellung der W-Kurven mit der allgemeinen Charakteristik $[e_1 e_2 \ldots e_r]$ $(e_1+e_2+\ldots+e_r = n+1)$ in nicht homogenen Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= c_1^t \\ y_2 &= c_1^t \cdot t \\ &\cdots\cdots \\ y_{e_1} &= c_1^t \cdot t^{e_1-1} \end{aligned}\right\} \quad 1^{\text{te}}\ \text{Gruppe}$$

$$\left.\begin{aligned} y_{e_1+1} &= c_2^t \\ y_{e_1+2} &= c_2^t \cdot t \\ &\cdots\cdots \\ y_{e_1+e_2} &= c_2^t \cdot t^{e_2-1} \end{aligned}\right\} \quad 2^{\text{te}}\ \text{Gruppe}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{aligned} y_{n-e_r+2} &= t \\ y_{n-e_r+3} &= t^2 \\ &\cdots\cdots \\ y_n &= t^{e_r-1} \end{aligned}\right\} \quad r^{\text{te}}\ \text{Gruppe}$$

(Die letzte Gruppe fällt weg, wenn $e_r = 1$).

Eine bemerkenswerte Darstellung lassen die beiden Klassen von Kurven zu, deren automorphe Kollineationen lauter getrennte oder lauter zusammenfallende Fixpunkte besitzen:

$[11\ldots1]$: $y_k = c_k{}^t = e^{t\cdot a_k}$, anders normiert
$y_k = t^{a_k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$;
$(a_k =$ konst., algebraisch oder transzendent).
$[n+1]$: $y_k = t^k$ (rationale Normalkurve).

In diesen extremen Klassen sind die *algebraischen W-Kurven* enthalten, sie sind auf algebraischem Wege von H. Mohrmann bestimmt[1]) und eingehender untersucht[2]) worden.

Die rationale Normalkurve nimmt eine Sonderstellung ein (vgl. den III. Abschnitt), insofern sie zugleich den Klassen $[11\ldots1]$ und $[n+1]$ angehört, entsprechend dem Umstande, dass sie eine mehr als *ein*-gliedrige (und zwar *drei*-gliedrige) projektive Gruppe gestattet.[3]) Die ausgezeichnete Klasse $[n+1]$ kommt dadurch zustande, dass die beiden Fixpunkte auf der Kurve zusammenfallen.

III.

Differentialgeometrische Bestimmung der W-Kurven.

Die analytische Form (8), in der wir im II. Abschnitt die homogenen Koordinaten einer W-Kurve des R_n als Funktionen eines Parameters dargestellt haben, als ein Fundamentalsystem von Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit konstanten Koeffizienten, legt es nahe, durch eine solche Differentialgleichung eben die W-Kurve festzulegen.

Ganz allgemein wird durch eine homogene lineare Differentialgleichung der Ordnung $(n+1)$

$$(1) \qquad x^{(n+1)} + \binom{n+1}{1} p_1 x^{(n)} + \binom{n+1}{2} p_2 x^{(n-1)} + \ldots + p_{n+1} x = 0$$

— wo die p_k Funktionen der unabhängigen Veränderlichen t sind (die numerischen Koeffizienten werden zur Vereinfachung von Transformationsformeln eingeführt) — eine Kurve im R_n bis auf projektive Transformationen bestimmt, indem $n+1$ linear unabhängige Integrale der Differentialgleichung als homogene Koordinaten gedeutet werden können. Die unabhängige Veränderliche t in (1) erscheint als der Parameter der Kurve.

[1]) H. Mohrmann, Math. Annalen 89 (1923), S. 260.
[2]) H. Mohrmann, Rend. Palermo 47 (1923).
[3]) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen 3, p. 187.

Die Kurve nennen wir eine *Integralkurve* von (1) (courbe attachée, nach Halphen).

Sei $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ ein Fundamentalsystem von (1); $n+1$ Funktionen

$$x_i' = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{i,n+1}x_{n+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

bilden, wenn sie linear unabhängig von einander sind, $det\ c_{ik}| \neq 0$, wiederum ein Fundamentalsystem. Durch die Differentialgleichung sind also die homogenen Koordinaten einer Integralkurve bis auf nicht-singuläre lineare Transformationen bestimmt. Andererseits sind, nach einer Untersuchung von P. Stäckel[1]), die allgemeinsten Transformationen, welche eine homogene lineare Differentialgleichung in eine ebensolche (mit neuen Koeffizienten) verwandeln, die Transformationen

$$(2) \qquad \begin{cases} t \to s = f(t) \\ x \to y = g(t) \cdot x \end{cases} \qquad (f,\ g \text{ beliebige Funktionen}).$$

Sie lassen die Integralkurve ungeändert, bedeuten sie doch eine beliebige Parametersubstitution und Multiplikation der homogenen Koordinaten mit einem beliebigen Proportionalitätsfaktor. Projektive Eigenschaften der Kurve sind Invarianten gegenüber den Transformationen (2), und umgekehrt liefern die Invarianten dieser Transformationen (als der allgemeinsten, bei denen Ordnung und Linearität von (1) erhalten bleiben) alle projektiven Eigenschaften der Kurve. Auf Grund dieser Verhältnisse ist die projektive Geometrie der Kurven, d. h. die Lehre von den invarianten Eigenschaften der Kurven gegenüber projektiven Transformationen, enthalten in der Invariantentheorie der linearen Differentialgleichungen.

Gleichungen, die aus (1) durch Transformationen (2) hervorgehen, nennen wir unter einander *äquivalent*. Eine Funktion der Koeffizienten von (1) und ihrer Ableitungen nach t heisst eine *absolute Differentialinvariante* der Differentialgleichung, wenn sie, gebildet aus den entsprechenden Grössen einer äquivalenten Gleichung, denselben Wert annimmt wie bei der Bildung aus den Grössen von (1). Sind also $p_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ die Koeffizienten der ursprünglichen Gleichung (1), $p_k^{(i)}(t)$ ihre i^{ten} Ableitungen nach t $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ und $q_k(s)$, $q_k^{(i)}(s)$ die entsprechenden Grössen der durch (2) transformierten Gleichung,

[1]) P. Stäckel, Crelles Journal 111 (1893), p. 290.

so heisst $f(p_1, p_1^{(1)}, \ldots, p_k^{(i)}, \ldots)$ eine absolute Differentialinvariante von (1), und damit auch der Integralkurven von (1), falls

$$f(p_1, p_1^{(1)}, \ldots, p_k^{(i)}, \ldots) = f(q_1, q_1^{(1)}, \ldots, q_k^{(i)}, \ldots);$$

insbesondere von der Ordnung m, wenn m^{te} und keine höheren Ableitungen darin vorkommen.

Unabhängigkeit der Differentialinvarianten von der freien Variablen (vom Parameter der Integralkurve) charakterisiert nach dieser Definition die Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Dieselbe Eigenschaft ist aber auch charakteristisch für diejenigen Kurven, die durch eine Gruppe projektiver Transformationen in sich „verschoben" werden können: die Invarianten müssen an allen Stellen der Kurve denselben Wert annehmen, d. h. unabhängig sein vom Parameter; sind sie das aber, so betrachte man in einem beliebigen Kurvenpunkte diejenige W-Kurve, welche dort dieselben Invarianten und dieselbe Schmiegungshyperebene besitzt wie die erste Kurve. Da sie Bahnkurve sein soll, sind nach dem vorausgehenden Satze ihre Invarianten fest, die zweite Kurve fällt ganz mit der ersten zusammen, die erste Kurve ist ebenfalls Bahnkurve.

Die homogenen Koordinaten einer W-Kurve des R_n genügen einer homogenen linearen Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Die zur Differentialgleichung der W-Kurve gehörige charakteristische Gleichung entscheidet durch die Anordnung ihrer Wurzeln darüber, welcher Klasse die automorphen Kollineationen der Kurve angehören. Das wird bei der genaueren Durchführung des Falles $n = 3$ deutlich werden.

Projektive Differentialgeometrie.

Zur genaueren Diskussion führen wir den Aufbau der projektiven Differentialgeometrie auf Grund der linearen homogenen Differentialgleichung in den wesentlichen Zügen durch. Ihre Koeffizienten lassen sich als Determinanten in x und seinen Ableitungen ausdrücken. Das geht aus der identisch verschwindenden Determinante

$$\begin{vmatrix} x_k & x_k' & x_k'' & \ldots & x_k^{(n)} & x_k^{(n+1)} \\ x_1 & x_1' & x_1'' & \ldots & x_1^{(n)} & x_1^{(n+1)} \\ x_2 & x_2' & x_2'' & \ldots & x_2^{(n)} & x_2^{(n+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n+1} & x_{n+1}' & x_{n+1}'' & \ldots & x_{n+1}^{(n)} & x_{n+1}^{(n+1)} \end{vmatrix} = 0, \text{ für } k = 1, 2, \ldots, n+1,$$

hervor, wenn man sie nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt. Fasst man noch $\sum_{k=1}^{n+1} x_k^{(i)}$ zum Vektor $x^{(i)}$ zusammen, so ergibt sich die Gleichung

$$(3) \qquad |x\,x'\ldots x^{(n)}|\cdot x^{(n+1)} - |x\,x'\ldots x^{(n-1)}\,x^{(n+1)}|\cdot x^{(n)} \pm \ldots + |x'\,x''\ldots x^{(n+1)}|\cdot x = 0\,.$$

Dabei bedeutet $|x\,x'\ldots x^{(n)}|$ die Determinante mit den Zeilen $x_i\,x_i'\ldots x_i^{(n)}$ $(i=1,2,\ldots,n+1)$, und es wird die Wronski-Determinante $w = |x\,x'\ldots x^{(n)}| \neq 0$, d. h. die Kurve als $(n-1)$-fach gekrümmt angenommen. Der Vergleich von (3) mit (1) liefert für die Koeffizienten die Ausdrücke:

$$\binom{n+1}{1} p_1 = \frac{-|x\,x'\ldots x^{(n-1)}\,x^{(n+1)}|}{w},$$

$$\binom{n+1}{2} p_2 = \frac{|x\,x'\ldots x^{(n-2)}\,x^{(n)}\,x^{(n+1)}|}{w},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{n+1}{n+1} p_{n+1} = \frac{\pm\,x'\,x''\ldots x^{(n+1)}}{w}.$$

Aus den Determinanten rechts werden also die Invarianten gebildet — gegenüber der Gruppe der inhaltstreuen Affinitäten des R_{n-1} sind diese Determinanten bereits invariant.

Zuerst suchen wir nach einem invarianten Parameter. Dazu dient in der *affinen* Geometrie die Determinante (niedrigster Ordnung) $|x\,x'\ldots x^{(n)}|$. Bei einer beliebigen Transformation des Parameters t in einen andern $s(t)$ gilt

$$\frac{d^i x}{dt^i}(dt)^i = \frac{d^i x}{ds^i}(ds)^i.$$

Das Produkt aus der Wronskideterminante $|x\,x'\ldots x^{(n)}|$ und der entsprechenden Potenz von dt, nämlich (darübergesetzte Ableitungszeichen sind nach t, danebengesetzte nach s zu verstehen)

$$\dot{x}\,\dot{x}\ldots x^{(n)}\cdot(dt)^{\frac{n(n+1)}{2}} = x\,x'\ldots x^{(n)}\,(ds)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ist somit invariant gegenüber beliebigen Parametersubstitutionen. Danach kann leicht ein bestimmter Parameter s (bis auf eine

additive Konstante) festgelegt werden durch die Forderung $x\,x'\ldots x^{(n)}=1$, nämlich

$$s=\int \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\left|x\,\dot{x}\ldots\overset{(n)}{x}\right|}\,dt\,.$$

Der invariante Parameter s heisst der Affinbogen der Kurve. — Einen invarianten Parameter gegenüber *projektiven* Transformationen kann man entsprechend aus der niedrigsten projektiven Differentialinvarianten bilden, nachdem die Differentialgleichung erst auf eine Form gebracht wurde, in der der zweite Koeffizient verschwindet. Wir nennen sie die normierte Form von (1):

$$x^{(n+1)}+\binom{n+1}{2}p_2\,x^{(n-1)}+\ldots+p_{n+1}\,x=0 \tag{4}$$

Diese ist leicht zu erreichen: Durch die in (2) enthaltene Transformation

$$x\to y=g(t)\cdot x$$

geht $p_1(t)$ über in

$$q_1(t)=\frac{g'(t)}{g(t)}+p_1(t)\,,$$

wird also Null, wenn speziell

$$g(t)=c\cdot e^{-\int p_1\,dt}$$

gesetzt wird. — Ein Aufbau der projektiven und affinen Differentialgeometrie für beliebigen Parameter lässt sich durchführen, wenn man den von Sannia, analog dem Riccikalkül, für *eine* Variable gebildeten absoluten Differentialkalkül benützt (vgl. Sannia[1]), [2])).

Alle Invarianten von (1) lassen sich, nach Halphen, durch $n-1$ Grundinvarianten und ihre Ableitungen ausdrücken. In Anlehnung an die analogen Begriffe der Bewegungsgeometrie nennt man ds das *projektive Bogenelement*, die Grundinvarianten die *Projektivkrümmungen*.[3]) Durch das Verschwinden der sämtlichen Projektivkrümmungen sind die rationalen Normalkurven gekennzeichnet. — Den Zusammenhang mit der affinen Geometrie des R_{n+1} herzustellen, setze man in (3) $x=y'$ und betrachte von $n+2$ linear unabhängigen Lösungen der entstehenden Gleichung

$$\left|y\,y'\ldots y^{(n+1)}\right|\cdot y^{(n+2)}\mp\ldots\pm\left|y''\,y'''\ldots y^{(n+2)}\right|\cdot y'=0\,, \tag{5}$$

[1]) G. Sannia, Atti di Torino 57 (1921/22), p. 293, p. 358.
[2]) G. Sannia, Annali di matematica (4) 1 (1923).
[3]) Die Wahl der Invarianten, die man als Krümmungen bezeichnen will, ist willkürlich, man wird die Invarianten niedrigster Ordnung wählen.

von denen eine $y = 1$ ist, die übrigen $n+1$ als nicht-homogene Koordinaten des R_{n+1}. Die Koeffizienten der normierten Form können als Grundinvarianten, die Affinkrümmungen, genommen werden, wie das Pick getan hat. Doch sind sie nicht die Invarianten niedrigster Ordnung. (Für den R_3 vgl. Blaschkes Differentialgeometrie II, § 30.)

W-Kurven des dreidimensionalen Raumes.

Wir diskutieren kurz alle möglichen Klassen von W-Kurven des gewöhnlichen Raumes, indem wir uns dabei der von Sannia[1]) aufgestellten Invarianten als erster und zweiter Projektivkrümmung bedienen.

Die niedrigsten Invarianten der Gleichung in der Normalform

$$x^{(4)} + 6\,p_2\,x'' + 4\,p_3\,x' + p_4\,x = 0 \tag{6}$$

sind

$$\Theta_3 = p_3 - \tfrac{3}{2}\,p_2', \qquad \vartheta_1 = p_4 - 2\,p_3' + \tfrac{6}{5}\,p_2'' - \tfrac{21}{25}\,p_2^2 .$$

$\Theta_3 = 0$ bedeutet, dass die Kurve einem linearen Komplex angehört. Wir suchen einen invarianten Parameter.

1) Ist $\Theta_3 \neq 0$, so lässt sich die unabhängige Variable so wählen, dass $\Theta_3 = 1$ wird. Bei der Transformation $t \to s = s(t)$ geht nämlich Θ_3 über in $\Theta_3 = \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}\,\Theta_3$, man braucht also nur

$$s = \int \sqrt[3]{\Theta_3}\,dt \qquad \text{zu wählen.} \quad (1.\ \text{Metrik})$$

2) Wenn $\Theta_3 = 0$, d. h. wenn die Kurve einem linearen Komplex angehört, wähle man

$$s = \int \sqrt[4]{\vartheta_4}\,dt, \qquad \text{alsdann wird } \vartheta_4 = \pm 1 \quad (2.\ \text{Metrik,}$$

für Kurven eines linearen Komplexes).

$s - s_0$ nennen wir die Projektivlänge des Kurvenbogens, der von den Punkten mit den Parameterwerten s bzw. s_0 begrenzt wird.

3) Ist endlich $\Theta_3 = 0$ und $\vartheta_4 = 0$, so reduziert sich die Differentialgleichung (6) auf die Form

$$\frac{d^4x}{dt^4} = 0\ ;$$

ihre Integralkurve, die kubische Parabel, hat in beiden Metriken die Länge Null. Für diese singuläre Kurve ist, wie wir schon sahen, auch die Klasseneinteilung nicht verbindlich.

[1]) G. Sannia, Annali di matematica (4) 1 (1923), p. 1.

Mit Sannia führen wir die Invarianten

$$I = \tfrac{3}{5}\, p_2\,, \qquad\qquad J = \vartheta_4$$

als erste und zweite Projektivkrümmung ein. $J = +1$ in der 2. Metrik. Sind umgekehrt I und J als Funktionen von s gegeben, so berechnen sich die Koeffizienten der Kurvengleichung aus

$$\begin{aligned} 6\,p_2 &= I\,, \\ 4\,p_3 &= 4\,\Theta_3 + 6\,p_2' = 4\,\Theta_3 + 10\,I'\,, \\ p_4 &= J + 3\,I'' + 9\,I^2\,. \end{aligned} \qquad \text{wo } \Theta_3 = \begin{cases} 1 \text{ in der 1. Metrik.} \\ 0 \text{ in der 2. Metrik.} \end{cases}$$

Die Differentialgleichung einer Kurve mit den Projektivkrümmungen I und J erscheint in der Form

$$x^{(4)} + 10\,I\,x'' + 2\,(5\,I' + 2\,\Theta_3)\,x' + (J + 3\,I'' + 9\,I^2)\,x = 0$$

$$\Theta_3 = \begin{cases} 1 \\ 0\,, \quad J = \pm 1 \text{ für Kurven eines linearen Komplexes.} \end{cases}$$

W-Kurven haben insbesondere eine Gleichung

$$x^{(4)} + 10\,I\,x'' + 4\,x' + (J + 9\,I^2)\,x = 0$$

oder, falls sie einem linearen Komplex angehören,

$$x^{(4)} + 10\,I\,x'' + (J + 9\,I^2)\,x = 0\,.$$

Die W-Kurven gestatten eine projektive Transformation in sich; zu welcher Klasse sie gehört, zeigt die zur Differentialgleichung der Kurve gehörige charakteristische Gleichung. Üben wir, um die projektive „Verschiebung" zu bewerkstelligen, eine Parametersubstitution $t' = t + p$ aus, so induzieren wir damit eine Kollineation des Raumes, deren Fixpunkte zusammen fallen oder getrennt liegen wie die Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Doch werden wir die Klassenzugehörigkeit jetzt charakterisieren durch Beziehungen zwischen den Projektivkrümmungen, wie sie aus der charakteristischen Gleichung zu entnehmen sind.

Im allgemeinen Fall wird die charakteristische Gleichung

$$s^4 + 10\,I\,s^2 + 4\,\Theta_3\,s + (J + 9\,I^2) = 0 \qquad \Theta_3 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

vier verschiedene Wurzeln haben: s_1, s_2, s_3, s_4; Klasse [1111]. In den andern Klassen besteht dagegen eine Relation zwischen den Invarianten, den Fall eingeschlossen, dass sie bestimmte

Werte annehmen. Wir gewinnen diese Relationen aus den symmetrischen Funktionen der Wurzeln

$$\begin{aligned} &s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0 \\ &s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_1 s_4 + s_2 s_3 + s_2 s_4 + s_3 s_4 = 10\, I \\ &s_1 s_2 s_3 + s_1 s_2 s_4 + s_1 s_3 s_4 + s_2 s_3 s_4 = 4\, \Theta_3 \\ &s_1 s_2 s_3 s_4 = J + 9\, I^2 \,. \end{aligned}$$

Von den vier Parametern s_1, s_2, s_3, s_4 lassen sich zwei stets eliminieren. Im allgemeinen Fall kann man über I und J willkürlich verfügen (Klasse [1111]). Fallen zwei Wurzeln der charakteristischen Gleichung zusammen, so werden I und J Funktionen *eines* Parameters (Klasse [211]). Bei [31] erhalten wir bestimmte Projektivkrümmungen. Im Falle [22] enthält die charakteristische Gleichung kein lineares Glied, die Kurven der Klasse [22] gehören einem linearen Komplex an und liegen auf Flächen zweiten Grades. Es wird insbesondere $(4\, I)^2 = J = \pm 1$. Im Falle [4] ist endlich $I = J = 0$.

Für W-Kurven eines linearen Komplexes enthält die charakteristische Funktion nur gerade Potenzen der Veränderlichen; solche W-Kurven liegen auf einer Fläche zweiten Grades (Halphen Oeuvres III, p. 478). Dazu gilt die Umkehrung (Halphen Oeuvres III, p. 487): Kurven auf Flächen zweiten Grades, deren Tangenten einem linearen Komplex angehören, sind W-Kurven.

Beispiele für die verschiedenen Kurvenklassen liefern uns zunächst die Normalformen (x, y, z nicht-homogene Koordinaten des R_3).

[1111] sind die allgemeinen höheren Parabeln und Hyperbeln (Polytropen in der Thermodynamik)

$$\left\{ x^{\alpha_3} = z^{\alpha_1},\ y^{\alpha_3} = z^{\alpha_2} \right\},\ \text{sie liegen auf Zylindern } x^{\alpha_2} = y^{\alpha_1}.$$

[211]: etwa die Kurve $\left\{ y = x^{\alpha},\quad z = ln\, x \right\}$, in Parameterform

$$\left\{ x = e^t,\ y = e^{\alpha t},\ z = t \right\},$$

gestattet die Parametersubstitution $t' = t + ln\, p$, die induzierte Kollineationsgruppe ist $\left\{ x' = p\, x,\ y' = p^{\alpha} y,\ z' = z + ln\, p \right\}$, ihre charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} p - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^{\alpha} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

[31]: $\left\{ x = e^t ,\ y = t ,\ z = t^2 \right\}$ gestattet $t' = t + p$, d. h. die Kollineation $\left\{ x' = e^p x ,\ y' = y + p ,\ z' = 2py + z + p^2 \right\}$ mit der charakteristischen Gleichung $(e^p - \lambda)\ (1 - \lambda)^3 = 0$.

$\left\{ \begin{array}{l} x = e^y \\ z = y^2 \end{array} \right.$ Exponentiallinie und Parabel sind die Projektionen der Kurve auf die xy- bzw. yz-Ebene.

[22]: $\left\{ x = e^t ,\ y = e^t \cdot t ,\ z = t \right\}$. Die Kurve gehört einem linearen Komplex an, sie liegt auf dem hyperbolischen Paraboloid $y - xz = 0$.

Besondere W-Kurven wird man geeigneter Weise auf Flächen suchen, die ihrerseits eine kontinuierliche Gruppe von Kollineationen gestatten. Als Beispiele führen wir an:

1. auf dem Kegel oder Kreiszylinder: die Loxodromen der Erzeugenden, das sind auf dem Zylinder die gemeinen Schraubenlinien, die durch eine Schraubung um die Axe in sich verschoben werden (Klasse [211]);

2. auf dem Kreiszylinder: Rotation + affine Transformation in der Axenrichtung hat zur Bahnkurve eine Linie, die beim Abrollen des Zylinders auf eine Ebene in die Exponentialkurve übergeht (Klasse [1111]);

3. auf der Kugel: die Loxodromen der Meridiane und Breitenkreise; den Charakter ihrer automorphen Gruppe (Klasse [1111]) ersieht man leicht, wenn man sie als stereographische Bilder von logarithmischen Spiralen in der Tangentialebene eines Poles deutet; analytisch: wir übertragen die Ausdrücke für die kartesischen Koordinaten der logarithmischen Spirale

$$\left\{ \begin{array}{l} x = e^{\frac{\varphi - \varphi_0}{m}} \cos \varphi \\ y = e^{\frac{\varphi - \varphi_0}{m}} \sin \varphi \end{array} \right. \qquad x^2 + y^2 = r^2 = e^{2\frac{\varphi - \varphi_0}{m}}$$

durch stereographische Projektion

$$\left\{ \xi = \frac{x}{1 + r^2} ,\ \eta = \frac{y}{1 + r^2} ,\ \zeta = \frac{r}{1 + r^2} \right\}$$

auf die Kugel $\xi^2 + \eta^2 = \zeta\,(1 - \zeta)$. In homogenen Koordinaten ϑ_i:

$$\xi = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_4} ,\ \eta = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_4} ,\ \zeta = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_4}$$

sind (7) die Gleichungen der Loxodromen; sie gestatten die durch $\varphi' = \varphi + a$ induzierte Kollineationsgruppe (8). (ξ, η, ζ kartesische Koordinaten des R_3, ξ- und x-, η- und y-Axe fallen zusammen.)

$$(7)\quad \begin{cases} \lambda\,\vartheta_1 = e^{\frac{\varphi-\varphi_0}{m}}\cos\varphi \\ \lambda\,\vartheta_2 = e^{\frac{\varphi-\varphi_0}{m}}\sin\varphi \\ \lambda\,\vartheta_3 = e^{\frac{2\varphi-\varphi_0}{m}} \\ \lambda\,\vartheta_4 = 1 + e^{\frac{2\varphi-\varphi_0}{m}} \end{cases} \qquad (8)\quad \begin{cases} \lambda\,\vartheta_1 = e^{\frac{a}{m}}(\vartheta_1\cos a - \vartheta_2\sin a) \\ \lambda\,\vartheta_2 = e^{\frac{a}{m}}(\vartheta_1\sin a + \vartheta_2\cos a) \\ \lambda\,\vartheta_3 = e^{\frac{2a}{m}}\vartheta_3 \\ \lambda\,\vartheta_4 = (e^{\frac{2a}{m}} - 1)\,\vartheta_3 + \vartheta_4 \end{cases}$$

Dem Wesen der metrisch interessanten Kurven, die sämtlich Isogonaltrajektorien eines Ebenenbüschels sind, entspricht es mehr, dass man sie als Kurven mit einer automorphen Gruppe von Kreis- oder Kugelverwandtschaften[1]) betrachte. Sie erscheinen dann als spezielle Fälle allgemeinerer Isogonaltrajektorien. Das genauere Studium ihrer Theorie macht es verständlich, weshalb für die W-Kurvenklassen [31] und [22] keine metrischen[2]) Spezialisierungen möglich sind.

Basel, im November 1925.

---

[1]) Vgl. E. Schubarth. Sur les courbes admettant un groupe de transformations de Mœbius. L'enseignement mathématique 25 (1926) p. 234. [Zusatz bei der Korrektur.]

[2]) „metrisch" heisst eine Eigenschaft, die der projektiven und der konformen Gruppe gemeinsam ist, also ihrem Durchschnitt, der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen gegenüber invariant bleibt. Es gibt keine Ähnlichkeitstransformationen des Raumes mit gerade zwei Fixpunkten.

Vita.

Ich, Emil Schubarth, bin am 31. März 1902 als Sohn des Kaufmanns Wilhelm Friedrich Schubarth und der Wilhelmine Barbara geb. Siegrist in Basel geboren. In dieser meiner Heimatstadt bin ich aufgewachsen und habe an ihren Schulen meine Ausbildung erfahren. Ausgestattet mit dem Reifezeugnis des Gymnasiums begann ich im Frühjahr 1920 das Studium der exakten Naturwissenschaften. Ich studierte in Basel und in Genf (Sommer 1921). Im Sommer 1922 schloss ich diese Studien ab durch Absolvierung der Mittellehrerprüfung. Ich studierte ein Jahr Medizin und Mathematik in München, wandte mich in der Folge ganz zur Mathematik. Im Hinblick auf meinen Gesundheitszustand kehrte ich im November 1923 nach Basel zurück und beschäftigte mich im Winter 1923/24 auf die Anregung von Herrn Prof. H. Mohrmann hin mit den Vorarbeiten zur Lösung der von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel gestellten Preisfrage, welche die allgemeine Bestimmung der W-Kurven verlangte. Im Frühjahr 1924 reiste ich nach Hamburg, wurde aber durch eine langwierige Krankheit an der Fortsetzung meines Studiums gehindert. Im folgenden Winter konnte ich die angefangene Arbeit weiterführen und bis zum Frühjahr 1925 zum Abschluss bringen. Ich verbrachte diese Zeit in Zürich, wo die Vorträge von Lehrern der Universität und polytechnischen Schule und besonders die Vorlesungen von Herrn Prof. Weyl mir viel Anregung boten.

Mit Herrn Prof. Mohrmann durfte ich wiederholt den Stoff der vorliegenden Arbeit durchgehen, wofür ich ihm besonderen Dank ausspreche.

Ich besuchte Vorlesungen und Übungen bei folgenden Herren Dozenten:

in Basel: Barth, Braun, Bernoulli, Fichter, Flatt, Hagenbach, Ludwig, Matthies, Mohrmann, Rupe, Senn, F. Speiser, Spiess, Spiro, Witschi, Zickendraht ;
in Genf: Claparède, Fehr, Guye, Guyénot;
in Hamburg: Hecke, Lenz;
in München: Frank, Göbel, Hertwig, Herzfeld, Mollier, Perron, Rückert, Specht, Sommerfeld, Wentzel;
in Zürich: Plancherel, Togliatti, Weyl.

Ich danke meinen Lehrern für das, was sie beigetragen haben zu meinem Bilde der Wissenschaft und der Persönlichkeit.